2. Três extensões do problema

Aline Guarnieri Gubitoso
Vinicius Cifú Lopes

GUBITOSO, G., and LOPES, V. C. Três extensões do problema. In: *Alocações, estabilidade e otimização*: uma introdução passo a passo [online]. São Bernardo do Campo, SP: Editora UFABC, 2017, pp. 23-46. ISBN: 978-85-6857-682-3. https://doi.org/10.7476/9788568576823.0003.

2

Três extensões do problema

Nossa apresentação do algoritmo de Gale-Shapley, no capítulo anterior, concentrou-se em um caso particular: mesmo número de homens (agentes proponentes) e mulheres (agentes seletores), com listas de preferência estritamente ordenadas e cada homem ou mulher sendo emparelhado a um único parceiro.

Agora, *relaxaremos* cada uma dessas condições, trabalhando, também, com situações de indiferença, números diferentes de homens e mulheres e casos de poligamia. Veremos que algumas dessas situações podem ser resolvidas por métodos novos, ainda que inspirados no original.

Porém, destacaremos que as três situações podem ser *reduzidas* ao cenário já estudado e resolvidas com o mesmo algoritmo. Uma *redução* de um problema B a um problema A é simplesmente uma transcrição da situação de B na linguagem e no contexto de A. Desse modo, resolvendo o problema assim transcrito com o método de A, obtemos uma solução de B invertendo a transcrição feita.

Nós veremos mais reduções nos capítulos seguintes, especialmente a de emparelhamento ao problema geral de otimização linear.

Também introduziremos a operação com listas incompletas de preferência, que adotaremos no restante do livro.

2.1 Trabalhando com indiferenças

Na situação-problema descrita e utilizada no capítulo anterior, tanto os homens como as mulheres, ao listarem uma ordem de preferência pelos indivíduos do grupo oposto segundo seus gostos, sempre esclareceram quais eram estas preferências. Entretanto, nem sempre uma determinada pessoa tem preferência sobre outras: assim, é necessário discutir situações em que há indiferença.

➥**Definição:** Utilizamos o conceito de indiferença para denotar situações em que dois ou mais elementos não são um mais preferido que o outro por alguém, em uma lista de preferência.

Dessa forma, mais uma vez, a título de exemplo para essa nova situação-problema, o universo foi determinado de forma aleatória como de homens e mulheres, sendo eles: Victor (V); Wilson (W); Xavier (X); Yuri (Y); Zé (Z); Ana (A); Beatriz (B); Carolina (C); Débora (D); Érica (E).

Como no exemplo anterior, cada uma dessas pessoas deve listar os membros do outro grupo de acordo com uma ordem de preferência para a escolha de seu parceiro de casamento, porém com a ressalva de que, agora, pode exprimir a equivalência entre alguns indivíduos, se houver.

➥**Notação:** Para denotar que A é indiferente, isto é, não tem preferência por X ou Y, utilizaremos o símbolo "$\equiv$", de modo que $X \equiv_A Y$ significa: para A, o indivíduo X não é mais ou menos preferível a Y, ou seja, ambos são equivalentes.

Assim, o primeiro passo é que as pessoas de ambos os grupos listem as pessoas do grupo oposto segundo uma ordem de preferência ou indiferença:

Victor:	$A \equiv C > D > E > B$	Ana:	$Z > V \equiv W > Y > X$
Wilson:	$A > D > E > B \equiv C$	Beatriz:	$V > X \equiv Y \equiv Z > W$
Xavier:	$C \equiv D > B > E \equiv A$	Carolina:	$Z > W \equiv V > X > Y$
Yuri:	$A > D \equiv B > E > C$	Débora:	$V > W \equiv Y \equiv X \equiv Z$
Zé:	$D \equiv C > A \equiv B \equiv E$	Érica:	$W > Z > X > Y \equiv V$

Uma vez esclarecidas as preferências e indiferenças de cada pessoa, começam as propostas dos homens às mulheres de que mais gostam, seja cada uma determinada (se há somente uma preferida), seja escolhida aleatoriamente (dentre as equivalentes).

Precisamos explicitar uma nova regra: se uma pessoa recebe uma nova proposta e, para ela, são equivalentes o novo candidato e quem ela havia escolhido na rodada anterior, então ela não trocará de parceiro, pois não haveria um ganho ao trocar o que "já tem" por algo que é "igual".

Observação: Substituindo o símbolo "≡" pelo símbolo ">", obtemos listas estritamente ordenadas com as quais já sabemos trabalhar. Suponha que conhecemos um emparelhamento estável de acordo com essas novas listas: então, não há um homem e uma mulher que se prefiram aos seus respectivos pares, ou seja, se temos os casais $I - P$ e $J - Q$ então $P >_I Q$ ou $J >_Q$ I. Desse modo, segundo as listas originais, $P >_I Q$ ou $P \equiv_I Q$ ou $J >_Q I$ ou $J \equiv_Q I$. Como supomos que um agente não troca parceiros equivalentes, mesmo que haja ganho estrito para outro agente, o emparelhamento obtido é estável também segundo as listas originais.

Essa observação nos mostra que o caso de indiferença pode ser prontamente reduzido ao caso de preferências estritas.

Contudo, faremos uma execução do algoritmo considerando diretamente as listas com indiferença e a hipótese de não substituição de equivalentes.

Também é importante esclarecer que, nessa situação, quando estudada em trabalhos práticos como em simulações computacionais, a indiferença entre parceiros pode ser removida artificialmente, após a formação das listas de preferência, por uma escolha aleatória pelo agente no momento de criar sua lista ou pelo computador ao identificar o primeiro indivíduo (ou um outro) entre os equivalentes. Dessa forma, durante a execução deste exemplo, utilizaremos a escolha aleatória sempre pelo indivíduo que aparecer primeiro na lista de preferência de um agente indiferente. Contudo, existe a possibilidade de formar outros arranjos pela escolha de outro indivíduo dentre os equivalentes, por exemplo, sempre a última pessoa ou uma sorteada. Portanto, a tomada de decisão dependerá de quais regras serão estabelecidas para orientar o processo artificial de escolha aleatória. Tal como na vida real, quando um indivíduo é obrigado a escolher, mesmo que por itens em indiferença, alguma característica influenciará sua decisão. Para denotar a escolha aleatória de um agente por um dentre os indivíduos equivalentes, ainda utilizaremos a moldura $\boxed{}$.

Em resumo, quando um agente faz uma proposta ou seleciona dentre propostas sem ter uma anterior, escolherá aquela que ocupa a melhor posição na lista; quando seleciona dentre propostas equivalentes, inclusive uma anterior, manterá esta oferta mais antiga.

De acordo com as listas de preferência, as propostas da primeira rodada começam com:

1ª Rodada – propostas

Victor:	$\boxed{A} \equiv C > D > E > B$	$V \rightsquigarrow A$
Wilson:	$\boxed{A} > D > E > B \equiv C$	$W \rightsquigarrow A$
Xavier:	$\boxed{C} \equiv D > B > E \equiv A$	$X \rightsquigarrow C$
Yuri:	$\boxed{A} > D \equiv B > E > C$	$Y \rightsquigarrow A$
Zé:	$\boxed{D} \equiv C > A \equiv B \equiv E$	$Z \rightsquigarrow D$

Como Victor é indiferente quanto à sua primeira escolha ser Ana ou Carolina, uma possível alocação, escolhida de forma artificial e aleatória para o exemplo, é a proposta dele a Ana. Porém, Wilson e Yuri também propõem a Ana, por ser ela sua primeira opção determinada. Semelhantemente, Xavier, que também se encontra em uma situação de indiferença, faz uma proposta a Carolina e Zé faz uma proposta a Débora.

Como o passo seguinte é a análise que cada mulher faz das propostas que recebeu (se recebeu alguma) para, assim, escolher a que acredita ser a mais atrativa ou escolher aleatoriamente entre dois homens que não são um mais preferível que o outro, temos:

1ª Rodada – escolhas

$V, W, Y \rightsquigarrow A$	Ana:	$Z > \boxed{V} \equiv W > Y > X$	$\therefore A{:}V$
$\emptyset \rightsquigarrow B$	Beatriz:	$V > X \equiv Y \equiv Z > W$	
$X \rightsquigarrow C$	Carolina:	$Z > W \equiv V > \boxed{X} > Y$	$\therefore C{:}X$
$Z \rightsquigarrow D$	Débora:	$V > W \equiv Y \equiv X \equiv \boxed{Z}$	$\therefore D{:}Z$
$\emptyset \rightsquigarrow E$	Érica:	$W > Z > X > Y \equiv V$	

Ana, ao ter de escolher entre Victor, Wilson e Yuri, sendo indiferente a Victor ou Wilson segundo sua lista de preferências, escolhe Victor segundo nossa convenção e rejeita Wilson (equivalente a Victor, mas listado depois dele) e Yuri (cuja proposta é inferior). As outras mulheres recebem uma ou nenhuma proposta e seguem o procedimento usual.

Na segunda rodada de escolhas, a partir das escolhas da tabela anterior, são feitas novas propostas:

2ª Rodada – propostas e escolhas

$$V \rightsquigarrow A \qquad \therefore A : V$$
$$X \rightsquigarrow C \qquad \therefore C : X$$
$$W, Y, Z \rightsquigarrow D \qquad \therefore D : Z$$

Neste momento, Débora recebeu as novas propostas de Wilson e Yuri para comparar com a de Zé, que ela já tinha. Contudo, as três opções lhe são equivalentes, de modo que ela prefere continuar com Zé, mesmo Wilson sendo o primeiro listado entre eles. Foi importante, aqui, Zé ter "chegado antes" a Débora.

Dessa forma, obtemos as seguintes tabelas:

Victor:	$\boxed{A} \equiv C > D > E > B$	Ana:	$Z > \boxed{V} \equiv W > Y > X$
Wilson:	$\hat{A} > \hat{D} > E > B \equiv C$	Beatriz:	$V > X \equiv Y \equiv Z > W$
Xavier:	$\boxed{C} \equiv D > B > E \equiv A$	Carolina:	$Z > W \equiv V > \boxed{X} > Y$
Yuri:	$\hat{A} > \hat{D} \equiv B > E > C$	Débora:	$V > W \equiv Y \equiv X \equiv \boxed{Z}$
Zé:	$\boxed{D} \equiv C > A \equiv B \equiv E$	Érica:	$W > Z > X > Y \equiv V$

Na continuação do processo, a terceira rodada inicia-se com:

3ª Rodada – propostas e escolhas

$$V \rightsquigarrow A;\ W \rightsquigarrow E;\ X \rightsquigarrow C;\ Y \rightsquigarrow B;\ Z \rightsquigarrow D.$$

Com isso, temos:

Victor:	$\boxed{A} \equiv C > D > E > B$	Ana:	$Z > \boxed{V} \equiv W > Y > X$
Wilson:	$\hat{A} > \hat{D} > \boxed{E} > B \equiv C$	Beatriz:	$V > X \equiv \boxed{Y} \equiv Z > W$
Xavier:	$\boxed{C} \equiv D > B > E \equiv A$	Carolina:	$Z > W \equiv V > \boxed{X} > Y$
Yuri:	$\hat{A} > \hat{D} \equiv \boxed{B} > E > C$	Débora:	$V > W \equiv Y \equiv X \equiv \boxed{Z}$
Zé:	$\boxed{D} \equiv C > A \equiv B \equiv E$	Érica:	$\boxed{W} > Z > X > Y \equiv V$

Isso conclui o processo de emparelhamento.

Logo, todos os homens e mulheres estão agora pareados de maneira estável, isto é, não há nenhuma mulher que preferisse estar com algum homem que também preferisse estar com ela, ao invés de sua parceira. Note que Wilson preferiria estar com Débora, mas, para ela, seu atual parceiro Zé é equivalente a Wilson e, portanto, a substituição não valeria a pena.

Portanto, emparelhamentos estáveis são possíveis inclusive quando ocorrem casos de indiferença, que pressupõem a escolha aleatória entre escolhas equivalentes, visto que, nessa situação, mesmo quando um dos indivíduos é indiferente a uma escolha, ele ainda tem de fazê-la (ainda que seja aleatória e artificialmente). Desse modo, a indiferença, na verdade, é eliminada, tornando a lista com indiferença uma lista sem indiferença (dentre várias possíveis), uma vez que continuam a serem feitas escolhas entre os indivíduos. Modificando essas escolhas quando há equivalência, porém, obtemos resultados diferentes, todos constituindo emparelhamentos estáveis para as listas de equivalência deste exemplo, como veremos no primeiro exercício a seguir.

Porém, podem não existir mais emparelhamentos que sejam ótimos para os homens ou para as mulheres, conforme destacam Roth; Sotomayor (1990, ex. 2.15).

Observação: Para os agentes proponentes, essa convenção de usar o primeiro da lista corresponde à substituição do símbolo "≡" pelo símbolo ">", como observamos no início. Então, se I tem a lista de preferências

$$I\text{: } P > Q \equiv R \equiv S > T,$$

na verdade, nós trabalhamos com a lista

$$I\text{: } P > Q > R > S > T.$$

Para os agentes seletores, não temos como fazer essa conversão de antemão, porque precisamos saber quem faz cada proposta. Porém, obtemos tal informação durante a execução do algoritmo. Suponha, então, que P tem a lista de preferências

$$P\text{: } I > J \equiv K \equiv L > M$$

e que, dentre J, K e J (um grupo de equivalentes entre si), P receba *primeiro* a proposta de K, rejeitando depois as de J e L se houver. Nesse caso, o comportamento de P é como se $K >_P J, L$ e obtemos uma lista estrita para P escolhendo uma relação arbitrária entre J e L, assim:

$$P\text{: } I > K > J > L > M.$$

Essa lista é a utilizada por P na execução do algoritmo, para todos os efeitos.

Ter montado listas estritas para todos os agentes, de modo que a execução do algoritmo corresponda ao preceito de não substituição de equivalentes, mostra que também essa formulação produz emparelhamentos estáveis.

❖ Exercícios

1) Mostre que as listas de preferência do exemplo acima podem ser tornadas iguais às listas de preferência estrita que utilizamos como exemplo no primeiro capítulo, com uma ordenação adequada das opções equivalentes. Confira, por outro lado, que o emparelhamento que obtivemos aqui difere daquele resultado.

2) Aplique o algoritmo, a partir das mesmas listas de preferência acima, agora do ponto de vista da proposta feita pelas mulheres, utilizando as regras de proposta à primeira opção e escolha (dentre equivalentes) pela opção anterior, se houver, ou então pela primeira opção. Repetimos as listas a seguir:

Ana:	$Z > V \equiv W > Y > X$	Victor:	$A \equiv C > D > E > B$
Beatriz:	$V > X \equiv Y \equiv Z > W$	Wilson:	$A > D > E > B \equiv C$
Carolina:	$Z > W \equiv V > X > Y$	Xavier:	$C \equiv D > B > E \equiv A$
Débora:	$V > W \equiv Y \equiv X \equiv Z$	Yuri:	$A > D \equiv B > E > C$
Érica:	$W > Z > X > Y \equiv V$	Zé:	$D \equiv C > A \equiv B \equiv E$

Resposta: O emparelhamento obtido é bem diferente, somente tendo o casal Victor e Ana em comum: $A - V$; $B - X$; $C - Z$; $D - W$ e $E - Y$.

3) A partir das listas de preferência abaixo, aplique novamente o algoritmo com as regras apresentadas em ambas as situações: homens proponentes e mulheres proponentes.

Otávio (O):	$N > M > I > J \equiv L$	Isabella (I):	$O > P \equiv S > T > R$
Pedro (P):	$N \equiv J > I > M > L$	Joana (J):	$O \equiv T \equiv S > R > P$
Roberto (R):	$L > I \equiv N > J > M$	Laura (L):	$R > S \equiv T \equiv O \equiv P$
Sérgio (S):	$I > M > N \equiv L \equiv J$	Marina (M):	$O \equiv P \equiv R > T > S$
Thiago (T):	$L > J \equiv I > M > N$	Natália (N):	$S \equiv O \equiv R > T \equiv P$

Resposta: Com a proposta dos homens às mulheres, obtemos os seguintes resultados: $O - N$; $P - M$; $R - L$; $S - I$ e $T - J$. Neste caso, a regra de indiferença é utilizada quando I não troca S por P. Com as mulheres sendo quem propõe, os pares formados são: $I - P$; $J - T$; $L - R$; $M - O$ e $N - S$.

4) Verifique que, com as listas do exercício anterior e substituindo imediatamente o símbolo "≡" pelo símbolo ">", obtemos casais diferentes quando o emparelhamento é realizado segundo as propostas dos homens: $O - N$; $P - I$; $R - L$; $S - M$ e $T - J$.

2.2 Trabalhando com números diferentes de indivíduos

O algoritmo também pode ser utilizado para tratar de situações de alocações com números desiguais de, por exemplo, homens e mulheres. Veremos como acomodar essa diferença em três momentos: com a adição de novos agentes "curingas" nas listas de preferência; sem o uso de curingas, reformulando as condições de conclusão do algoritmo (isto é, quando sabemos que o procedimento chegou ao final); com a consideração de listas incompletas de preferência, que é o tratamento mais geral e do qual nos serviremos no restante do livro.

Solução com curingas

Acrescentar um "curinga" ou um novo objeto à estrutura existente é um artifício ubíquo em raciocínios matemáticos. O curinga será considerado um novo agente, terá uma lista de preferência própria e deverá ser incluído nas listas de preferência dos agentes originais.

Para realizar isso, se o indivíduo não informa nada a não ser a listagem de uma ordem de preferência pelas pessoas do outro grupo, o curinga é colocado no final de sua lista de preferência. Por outro lado, se essa pessoa informar (ou o sistema acomodar essa informação), o curinga pode ir em qualquer lugar na ordem de preferência desse indivíduo, separando quem essa pessoa gostaria de casar de quem ela não aceitaria. Esse curinga pode, inclusive, ir no começo de uma lista de preferência ao ser também utilizado como uma preferência pelas pessoas que escolhem ficar sozinhas a parear-se com quaisquer pessoas do outro grupo. Porém, se um indivíduo for alocado a um curinga sem que esta fosse sua preferência, significa que todas as pessoas do grupo oposto rejeitaram sua proposta, de modo que, ao ser alocado a um curinga, esta pessoa fica solteira.

Em razão dessa possibilidade, finalmente iremos tratar de ocorrências em que um agente acredita que determinada alocação é pior do que continuar sem combinação, no caso, continuar solteiro; porém, descobriremos uma imperfeição nesse procedimento, relacionada à assimetria entre quem propõe e quem apenas seleciona propostas.

↪**Notação:** Para denotar o curinga, utilizaremos o símbolo ■.

Para ilustrar essa problemática, o universo foi montado como de 5 homens e 4 mulheres, sendo eles: Victor (V); Wilson (W); Xavier (X); Yuri (Y); Zé (Z); Beatriz (B); Carolina (C); Débora (D); Érica (E) .

Deste modo, mais uma vez é iniciado o processo com a listagem que cada uma dessas pessoas faz dos membros do outro grupo de acordo com uma ordem de preferência para a escolha de seu parceiro de casamento; com a diferença, entretanto, de que, agora, eles podem incluir o curinga em sua lista de preferência quando e se preferirem ficar solteiros a escolher alguma das opções que ainda não listaram.

Incluímos uma lista de indiferença para o curinga, de modo a contemplá-lo no algoritmo.

Victor:	$C > D > \blacksquare > E > B$	Beatriz:	$Y > X > Z > V > W$
Wilson:	$B > E > C > D > \blacksquare$	Carolina:	$W > X > Y > V > Z$
Xavier:	$B > C > E > D > \blacksquare$	Débora:	$X > Z > Y > V > W$
Yuri:	$C > B > D > E > \blacksquare$	Érica:	$W > Z > X > Y > V$
Zé:	$D > B > C > E > \blacksquare$	■:	$V \equiv W \equiv X \equiv Y \equiv Z$

A partir da listagem dessas preferências, de acordo com o processo já explicado anteriormente, começam as rodadas de propostas dos homens às mulheres que acreditam ser as mais preferíveis e subsequentes escolhas de cada mulher pelo melhor homem dentre os que lhe propõe.

1ª Rodada – propostas

Victor:	$\boxed{C} > D > \blacksquare > E > B$	$V \rightsquigarrow C$
Wilson:	$\boxed{B} > E > C > D > \blacksquare$	$W \rightsquigarrow B$
Xavier:	$\boxed{B} > C > E > D > \blacksquare$	$X \rightsquigarrow B$
Yuri:	$\boxed{C} > B > D > E > \blacksquare$	$Y \rightsquigarrow C$
Zé:	$\boxed{D} > B > C > E > \blacksquare$	$Z \rightsquigarrow D$

1ª Rodada – escolhas

$W, X \rightsquigarrow B$	B:	$Y > \boxed{X} > Z > V > W$	$\therefore B : X$
$V, Y \rightsquigarrow C$	C:	$W > X > \boxed{Y} > V > Z$	$\therefore C : Y$
$Z \rightsquigarrow D$	D:	$X > \boxed{Z} > Y > V > W$	$\therefore D : Z$
$\emptyset \rightsquigarrow E$	E:	$W > Z > X > Y > V$	
	$\blacksquare$:	$V \equiv W \equiv X \equiv Y \equiv Z$	

Conforme as decisões desses indivíduos, na rodada seguinte temos:

2ª Rodada – propostas e escolhas

Victor:	$\hat{C} > \hat{D} > \blacksquare > E > B$	Beatriz:	$Y > \boxed{X} > Z > V > W$
Wilson:	$\hat{B} > \boxed{E} > C > D > \blacksquare$	Carolina:	$W > X > \boxed{Y} > V > Z$
Xavier:	$\boxed{B} > C > E > D > \blacksquare$	Débora:	$X > \boxed{Z} > Y > V > W$
Yuri:	$\boxed{C} > B > D > E > \blacksquare$	Érica:	$\boxed{W} > Z > X > Y > V$
Zé:	$\boxed{D} > B > C > E > \blacksquare$	$\blacksquare$:	$V \equiv W \equiv X \equiv Y \equiv Z$

Na terceira rodada, Victor, como o único homem rejeitado, faz uma nova proposta:

3ª Rodada – propostas e escolhas

Victor:	$\hat{C} > \hat{D} > \boxed{\blacksquare} > E > B$	Beatriz	$Y > \boxed{X} > Z > V > W$
Wilson:	$\hat{B} > \boxed{E} > C > D > \blacksquare$	Carolina:	$W > X > \boxed{Y} > V > Z$
Xavier:	$\boxed{B} > C > E > D > \blacksquare$	Débora:	$X > \boxed{Z} > Y > V > W$
Yuri:	$\boxed{C} > B > D > E > \blacksquare$	Érica:	$\boxed{W} > Z > X > Y > V$
Zé:	$\boxed{D} > B > C > E > \blacksquare$	$\blacksquare$:	$\boxed{V} \equiv W \equiv X \equiv Y \equiv Z$

Logo, o processo termina aqui, quando todos os agentes estão ou pareados com alguém do grupo oposto ou solteiros.

Esse exemplo é particular, no sentido de que o número de mulheres é exatamente um a menos que o de homens, de modo que algum homem ficaria solteiro (não haveria mulheres o suficiente para todos os homens). Entretanto, nenhum homem foi alocado a um curinga por ter suas propostas rejeitadas por todas as mulheres, devido ao fato de que Victor, de livre e espontânea vontade (ou seja, segundo sua lista de preferências), escolheu ficar sozinho. Isso porque, para ele, se ele não casasse com Carolina ou Débora, não haveria nenhuma outra mulher com quem ele aceitaria se casar; assim, ao ser sua terceira opção continuar solteiro, Victor esclarece que, para ele, qualquer casamento com as demais mulheres (Érica ou Beatriz) seria inaceitável, isto é, seria pior do que continuar solteiro.

Contudo, se Victor tivesse uma lista de preferência diferente, em que preferisse Érica e Beatriz à opção de ficar solteiro (ou seja, ficar solteiro seria sua última opção), ele ainda seria o homem solteiro da alocação (agora forçado), uma vez que, com a continuação do processo, suas propostas a Érica e Beatriz seriam ambas rejeitadas.

Outras listas de preferência, é claro, podem levar a situações distintas.

Em geral, podemos usar mais curingas, de modo que sua quantidade corresponda à diferença exata entre os totais dos grupos, sendo que, em cada lista de preferência, eles devem estar contíguos e ser equivalentes (por motivos de lógica). Por exemplo, se forem 5 homens e 3 mulheres, teremos dois curingas em sequência na lista de preferências fornecida por cada homem.

❖ Exercício

1) Aplique o algoritmo do ponto de vista da proposta feita pelas mulheres, a partir das mesmas listas de preferências acima, verificando qual dos homens ficaria solteiro e se seria de forma forçada (rejeitado por todas as mulheres) ou por opção (propondo ao curinga antes de alguma mulher). Repetimos as listas abaixo:

Beatriz:	$Y > X > Z > V > W$	Victor:	$C > D > \blacksquare > E > B$
Carolina:	$W > X > Y > V > Z$	Wilson:	$B > E > C > D > \blacksquare$
Débora:	$X > Z > Y > V > W$	Xavier:	$B > C > E > D > \blacksquare$
Érica:	$W > Z > X > Y > V$	Yuri:	$C > B > D > E > \blacksquare$
$\blacksquare$:	$V \equiv W \equiv X \equiv Y \equiv Z$	Zé:	$D > B > C > E > \blacksquare$

Resposta: Ao verificarmos que os pares formados são $B - Y$, $C - X$, $D - Z$, $E - W$, percebemos que Victor continua a ser o homem que fica solteiro, de forma forçada, uma vez que nenhuma mulher lhe propõe. Note que, neste caso, há menos agentes proponentes que receptores.

Observação: Nossa conclusão sobre curingas servirem para separar opções "aceitáveis" e "inaceitáveis" é natural e válida para os agentes proponentes (homens), devido ao fato de suas molduras deslocarem-se sempre da opção mais preferida para a menos preferida durante a execução de Gale-Shapley. Porém, o deslocamento contrário para os agentes seletores (mulheres) inviabiliza essa manobra.

Tentar resolver esse problema só gera confusão: por exemplo, se pusermos as opções inaceitáveis *antes* do curinga e as aceitáveis *depois*, contrariamente ao próprio espírito de ordenação das listas de preferência, nem assim obteremos uma solução.

Não devemos pensar nisso como um defeito do artifício de usar curingas, que tem o mérito de destacar essa confusão assim que se pensa no caso, mas como um reflexo do exagero no seu uso.

Para o problema inicial de números diferentes de indivíduos, os curingas podem ser utilizados sem problemas, *sempre ao final* das listas de preferência originais; no entanto, procuraremos, também, uma solução diferente.

Depois retomaremos a questão das opções inaceitáveis (na literatura, o curinga pode aparecer, em uma lista de preferência, usado para tão somente *delimitar* as opções aceitáveis e as inaceitáveis).

Solução sem curingas

Como visto acima, a utilização do curinga é um facilitador para a resolução de problemas com diferentes números de indivíduos.

Entretanto, existe uma outra forma de tornar esta situação-problema resolvível através da modificação das condições de encerramento do algoritmo.

Note que, nas explicações e exemplos até aqui, definimos que o algoritmo chegava ao fim quando todos os agentes que faziam as propostas estavam pareados a agentes do outro conjunto. Então, acordamos que o processo continua enquanto algum proponente ainda tiver, em sua lista de preferência, alguns candidatos seletores a quem propor. Ou seja, o processo termina quando, após uma rodada completa de propostas e escolhas, cada proponente ou está pareado a algum seletor ou foi rejeitado por todos, terminando solteiro.

❖ **Exercício**

1) Quais alterações são necessárias no programa de computador descrito na Seção 1.4 para acomodar essa nova condição de parada e os números diferentes de homens e mulheres?

No caso específico de o número de agentes proponentes ser menor que o de seletores, digamos h homens e m mulheres com $h \leq m$, o encerramento do processo pode ser descrito de outro modo: é quando h mulheres diferentes estão pareadas. Porém, essa descrição não será válida no caso de listas incompletas, que adotaremos a seguir.

Listas incompletas de preferência

Uma solução que comporta a manifestação de opções aceitáveis ou inaceitáveis é, simplesmente, não listar as opções inaceitáveis nas listas de preferência, isto é, cada homem listará somente as mulheres com as quais aceita se casar e cada mulher listará somente os homens que considera aceitáveis. Naturalmente, as listas podem ter números variados de integrantes e deverão ser tratadas com a formulação do algoritmo que trata números diferentes de indivíduos.

O novo procedimento sempre encontrará uma solução estável, em um número finito de etapas, mas poderá acontecer que agentes (possivelmente todos) resultem solteiros.

Por exemplo, A: $X > Y$ significa que A prefere X e depois Y, mas se não for emparelhado com nenhum dos dois, A prefere não admitir nenhum outro agente. Analogamente, a lista X: A significa que X prefere o agente A mas se não conseguir tal resultado, então prefere não ter nenhum outro. (Alguns autores exprimem que tal agente será "alocado a si mesmo".)

Nessa situação, os agentes rejeitam automaticamente as propostas vindas de quem não está em suas listas, de modo que, para acelerar o procedimento, podemos previamente remover A da lista de X se X não está na lista de A (porque A não aceitaria X), no caso de X propor e A selecionar. Também, após a montagem das listas de preferência, podemos retirar do procedimento quem já não aceita ninguém como parceiro.

É com esta formulação em mente que trabalharemos a partir de agora, ao expressar as listas de preferência dos nossos exemplos.

❖ Exercícios

1) Aplique o algoritmo às listas de preferência seguintes, em que há duas mulheres a menos, tanto da perspectiva dos homens propondo, como quando as mulheres propõem:

Victor:	A	Ana:	$Z > W > V > Y > X$
Wilson:	$A > C > B$	Beatriz:	$V > X > Y > Z > W$
Xavier:	$B > C > A$	Carolina:	$Z > W > V > X > Y$
Yuri:	$A > B$		
Zé:	$C > A > B$		

Resposta: Em ambas as situações, Victor e Yuri permanecem solteiros, enquanto se formam os casais $W - A$, $X - B$ e $Z - C$.

2) Aplique o algoritmo às listas de preferência seguintes, em que há duas mulheres a menos, tanto da perspectiva dos homens propondo, como quando as mulheres propõem:

Victor:	C	Ana:	$Z > Y > X > V$
Wilson:	$A > B > C$	Beatriz:	$Y > X > W > V$
Xavier:	$A > C > B$	Carolina:	$X > V > Y$
Yuri:	$C > A > B$		
Zé:	$B > C > A$		

Resposta: Quando os homens propõem, formam-se os casais $X – C$, $Y – A$ e $Z – B$. Quando as mulheres propõem, formam-se os casais $A – Z$, $B – Y$ e $C – X$. Em ambas as situações, Victor e Wilson permanecem solteiros.

2.3 Permitindo poligamia

O algoritmo, além de conseguir tratar de situações com indiferença e com números desiguais de homens e mulheres, também pode ser adaptado para uma análise das situações em que ocorre pareamento de um indivíduo com mais de um único elemento do outro grupo. Ou seja, iremos discutir agora a situação em que, por exemplo, um homem deseja ter mais de uma companheira.

Faremos isso criando "vagas" ou "*slots*" para múltiplas mulheres na "carteira" de cada homem.

> ↪**Procedimento:** Para denotar que X escolhe ter 3 parceiras, utilizaremos índices numéricos da seguinte forma: X_1, X_2, X_3, que significa dizer que cada X_i corresponde a uma das "vagas" para parceira de X.

Para ilustrar essa ocorrência, o universo foi determinado de forma aleatória como de 2 homens e 7 mulheres, sendo eles: Xavier (X); Yuri (Y); Ana (A); Beatriz (B); Carolina (C); Débora (D); Érica (E); Flávia (F); Glória (G). Acrescentamos que Xavier deseja ter três parceiras e Yuri procura por duas parceiras. Em consequência disso, Xavier tem três "vagas" para companheira, enquanto que Yuri tem duas "vagas", com um total de cinco vagas, e duas mulheres ficarão solteiras. Débora e Glória, porém, aceitam somente um homem cada. Os agentes têm as seguintes preferências:

Xavier:	$D > F > C > B > A > G > E$	Ana:	$Y > X$
Yuri:	$C > D > B > G > E > A > F$	Beatriz:	$X > Y$
		Carolina:	$X > Y$
		Débora:	Y
		Érica:	$X > Y$
		Flávia:	$Y > X$
		Glória:	X

Dessa forma, o processo de listagem das preferências que cada uma dessas pessoas faz em relação aos membros do outro grupo é o mesmo. Porém, agora, cada homem tem uma lista para cada "vaga". Para a execução do algoritmo, as vagas são consideradas como "pessoas diferentes". Por outro lado, todas as listas de preferência das vagas de um mesmo homem devem ser as mesmas e idênticas às preferências desse homem. Finalmente, tais vagas são equivalentes nas listas das mulheres, porque correspondem ao mesmo homem:

$X_1: D > F > C > B > A > G > E$	A: $Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$
$X_2: D > F > C > B > A > G > E$	B: $X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$
$X_3: D > F > C > B > A > G > E$	C: $X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$
$Y_1: C > D > B > G > E > A > F$	D: $Y_1 \equiv Y_2$
$Y_2: C > D > B > G > E > A > F$	E: $X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$
	F: $Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$
	G: $X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$

À medida que as rodadas se desenvolvem, os homens fazem propostas às mulheres de que mais gostam, escolhendo a primeira mulher em sua lista de preferência com cada uma de suas "vagas". Desse modo, suas vagas, por serem consideradas como pessoas distintas, irão todas propor à mesma mulher, a qual escolhe sempre a primeira opção como uma possível escolha artificial (já discutida no problema de indiferenças) dentre as que são equivalentes.

1ª Rodada – propostas e escolhas

Olhando as preferências dos homens em suas listas e a consequente escolha das mulheres quanto às propostas que recebem, temos que X_1, X_2 e X_3 propõem a Débora, que não os aceita; Y_1 e Y_2 propõem a Carolina, que seleciona Y_1 e rejeita Y_2, escolhendo, das duas vagas equivalentes, apenas uma. Assim, a execução desse processo nada difere das anteriores.

$$
\begin{array}{ll}
X_1: \hat{D} > F > C > B > A > G > E & A: Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 \\
X_2: \hat{D} > F > C > B > A > G > E & B: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2 \\
X_3: \hat{D} > F > C > B > A > G > E & C: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > \boxed{Y_1} \equiv Y_2 \\
Y_1: \boxed{C} > D > B > G > E > A > F & D: Y_1 \equiv Y_2 \\
Y_2: \hat{C} > D > B > G > E > A > F & E: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2 \\
 & F: Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 \\
 & G: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3
\end{array}
$$

Como os homens têm algumas de suas "vagas" rejeitadas, novas propostas são feitas de modo que se modifique as tabelas:

2ª Rodada – propostas e escolhas

$$
\begin{array}{ll}
Y_2 \rightsquigarrow D & \therefore D: Y_2 \\
X_1, X_2, X_3 \rightsquigarrow F & \therefore F: X_1 \\
Y_1 \rightsquigarrow C & \therefore C: Y_1
\end{array}
$$

Com as novas propostas, obtemos:

$$
\begin{array}{ll}
X_1: \hat{D} > \boxed{F} > C > B > A > G > E & A: Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 \\
X_2: \hat{D} > \hat{F} > C > B > A > G > E & B: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2 \\
X_3: \hat{D} > \hat{F} > C > B > A > G > E & C: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > \boxed{Y_1} \equiv Y_2 \\
Y_1: \boxed{C} > D > B > G > E > A > F & D: Y_1 \equiv \boxed{Y_2} \\
Y_2: \hat{C} > \boxed{D} > B > G > E > A > F & E: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2 \\
 & F: Y_1 \equiv Y_2 > \boxed{X_1} \equiv X_2 \equiv X_3 \\
 & G: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3
\end{array}
$$

Como ainda há rejeições, no caso de X_2 e X_3, ocorre uma terceira rodada:

3ª Rodada – propostas e escolhas

$$
\begin{array}{ll}
X_1: \hat{D} > \boxed{F} > C > B > A > G > E & A: Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 \\
X_2: \hat{D} > \hat{F} > \boxed{C} > B > A > G > E & B: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2 \\
X_3: \hat{D} > \hat{F} > \hat{C} > B > A > G > E & C: X_1 \equiv \boxed{X_2} \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2 \\
Y_1: \hat{C} > D > B > G > E > A > F & D: Y_1 \equiv \boxed{Y_2} \\
Y_2: \hat{C} > \boxed{D} > B > G > E > A > F & E: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2 \\
 & F: Y_1 \equiv Y_2 > \boxed{X_1} \equiv X_2 \equiv X_3 \\
 & G: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3
\end{array}
$$

É importante destacar que, como as listas de preferência de cada "vaga" de um mesmo homem têm a mesma ordenação das mulheres, as propostas a uma mesma mulher serão frequentes. Quando a vaga faz uma proposta, a mulher escolhida já pode estar alocada com outra vaga do mesmo homem, o que resulta na permanência da vaga original, segundo nosso critério de não trocar equivalentes. Exemplo disso é que Débora rejeitará Y_1 porque já está alocada com Y_2:

4ª Rodada – propostas e escolhas

$$X_1: \hat{D} > \boxed{F} > C > B > A > G > E$$
$$X_2: \hat{D} > \hat{F} > \boxed{C} > B > A > G > E$$
$$X_3: \hat{D} > \hat{F} > \hat{C} > \boxed{B} > A > G > E$$
$$Y_1: \hat{C} > \hat{D} > B > G > E > A > F$$
$$Y_2: \hat{C} > \boxed{D} > B > G > E > A > F$$

$$A: Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$$
$$B: X_1 \equiv X_2 \equiv \boxed{X_3} > Y_1 \equiv Y_2$$
$$C: X_1 \equiv \boxed{X_2} \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$$
$$D: Y_1 \equiv \boxed{Y_2}$$
$$E: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$$
$$F: Y_1 \equiv Y_2 > \boxed{X_1} \equiv X_2 \equiv X_3$$
$$G: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$$

5ª Rodada – propostas e escolhas

$$X_1: \hat{D} > \boxed{F} > C > B > A > G > E$$
$$X_2: \hat{D} > \hat{F} > \boxed{C} > B > A > G > E$$
$$X_3: \hat{D} > \hat{F} > \hat{C} > \boxed{B} > A > G > E$$
$$Y_1: \hat{C} > \hat{D} > \hat{B} > G > E > A > F$$
$$Y_2: \hat{C} > \boxed{D} > B > G > E > A > F$$

$$A: Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$$
$$B: X_1 \equiv X_2 \equiv \boxed{X_3} > Y_1 \equiv Y_2$$
$$C: X_1 \equiv \boxed{X_2} \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$$
$$D: Y_1 \equiv \boxed{Y_2}$$
$$E: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$$
$$F: Y_1 \equiv Y_2 > \boxed{X_1} \equiv X_2 \equiv X_3$$
$$G: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$$

6ª Rodada – propostas e escolhas

$$X_1: \hat{D} > \boxed{F} > C > B > A > G > E$$
$$X_2: \hat{D} > \hat{F} > \boxed{C} > B > A > G > E$$
$$X_3: \hat{D} > \hat{F} > \hat{C} > \boxed{B} > A > G > E$$
$$Y_1: \hat{C} > \hat{D} > \hat{B} > \hat{G} > E > A > F$$
$$Y_2: \hat{C} > \boxed{D} > B > G > E > A > F$$

$$A: Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$$
$$B: X_1 \equiv X_2 \equiv \boxed{X_3} > Y_1 \equiv Y_2$$
$$C: X_1 \equiv \boxed{X_2} \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$$
$$D: Y_1 \equiv \boxed{Y_2}$$
$$E: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$$
$$F: Y_1 \equiv Y_2 > \boxed{X_1} \equiv X_2 \equiv X_3$$
$$G: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$$

7ª Rodada – propostas e escolhas

$X_1: \hat{D} > \boxed{F} > C > B > A > G > E$
$X_2: \hat{D} > \hat{F} > \boxed{C} > B > A > G > E$
$X_3: \hat{D} > \hat{F} > \hat{C} > \boxed{B} > A > G > E$
$Y_1: \hat{C} > \hat{D} > \hat{B} > \hat{G} > \boxed{E} > A > F$
$Y_2: \hat{C} > \boxed{D} > B > G > E > A > F$

$A: Y_1 \equiv Y_2 > X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$
$B: X_1 \equiv X_2 \equiv \boxed{X_3} > Y_1 \equiv Y_2$
$C: X_1 \equiv \boxed{X_2} \equiv X_3 > Y_1 \equiv Y_2$
$D: Y_1 \equiv \boxed{Y_2}$
$E: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3 > \boxed{Y_1} \equiv Y_2$
$F: Y_1 \equiv Y_2 > \boxed{X_1} \equiv X_2 \equiv X_3$
$G: X_1 \equiv X_2 \equiv X_3$

Segundo a tabela, Xavier consegue então se unir a Beatriz, Carolina e Flávia, enquanto Yuri se estabelece com Débora e Érica. Consequentemente, por não haver mais "vagas" disponíveis, Ana é forçada a ficar solteira, ao passo que Glória fica solteira por escolha própria, por preferir isso a ser pareada com Yuri.

A partir desses resultados, percebemos que não há nenhuma ocorrência de instabilidade, mesmo quando expandimos esse algoritmo a situações em que o emparelhamento ocorre entre mais do que um indivíduo com um outro. Isso porque, ao repetirmos as listas de preferências, ao invés de modificarmos o algoritmo, transformamos os polígamos Xavier e Yuri em X_1, X_2, X_3, Y_1 e Y_2, de modo que utilizamos nessa resolução tanto a repetição da lista dos polígamos como o algoritmo Gale-Shapley.

Note que outros conjuntos de listas de preferência podem resultar em agentes polígamos sem preencher todas as suas "vagas".

❖ Exercícios

1) Aplique o algoritmo, agora do ponto de vista da proposta feita pelas mulheres, às mesmas listas de preferência, reproduzidas a seguir:

Ana:	$Y > X$	Xavier (3 vagas): $D > F > C > B > A > G > E$
Beatriz:	$X > Y$	Yuri (2 vagas): $C > D > B > G > E > A > F$
Carolina:	$X > Y$	
Débora:	Y	
Érica:	$X > Y$	
Flávia:	$Y > X$	
Glória:	X	

Resposta: Novamente obtemos $X - \{B, C, F\}$ e $Y - \{D, E\}$, enquanto Ana é forçada a ficar solteira e Glória o faz por opção (Yuri a preferiria a Érica).

2) Aplique o algoritmo, uma vez para propostas feitas pelos homens, outra pelas mulheres, às listas de preferência abaixo, verificando quais mulheres ficam solteiras e se de forma forçada (rejeitadas por todos os homens) ou não:

R (3 vagas): $D > A > F > G > C > E > B > H$
S (1 vaga): $G > B > C > A > F > D > E > H$
T (2 vagas): $G > E > A > F > C > D > B > H$

A: $T > S > R$
B: $S > R > T$
C: $R > T > S$
D: $T > S$
E: $R > S > T$
F: $S > T > R$
G: $T > R$
H: R

Resultado: Com os homens propondo, obtemos $R - \{A, C, F\}$, $S - B$ e $T - \{E, G\}$, enquanto D fica solteira por opção e H porque ninguém lhe propõe. Com as mulheres propondo, a situação das solteiras é a mesma, porém, $R - \{C, E, F\}$, $S - B$ e $T - \{A, G\}$.

Solução sem multiplicações

O procedimento descrito acima para tratar a poligamia é muito ineficiente, ao fazer várias vagas atuarem como pessoas e proporem repetidamente a um mesmo indivíduo, mesmo quando este já rejeitou uma vaga semelhante ou está alocado a outra vaga semelhante.

Podemos, tanto nestes exemplos pequenos como na prática computacional, trabalhar com as listas originais e manter, também, registros dos totais de vagas para cada agente e as respectivas quantidades de vagas ainda disponíveis ou não preenchidas. Com esse formato, mantemos, para cada "carteira", uma listagem temporária de "associados" e, quando completa, substituímos os associados menos preferidos por aqueles que estão ingressando.

Por exemplo, suponha que X tenha três vagas, todas preenchidas pelos associados $B > A > C$. Suponha, também, que X é um agente seletor, que recebe propostas. Ele somente aceitará uma proposta de D caso $D > C$; depois da substituição, a listagem temporária será ordenada novamente segundo as preferências de X, podendo ser $B > D > A$, por exemplo, e deixando A em situação de potencial substituição. Por outro lado, na situação de ser X quem faz propostas, ele somente proporá a algum agente quando A, B ou C abandonarem-no em prol de outra oferta mais interessante e, em caso de aceitação, preencherá a vaga aberta.

No caso de um número arbitrário de vagas abrindo-se, portanto, tomamos em conjunto os "associados" e as novas propostas, selecionamos os candidatos mais preferidos, dentre todos, e rejeitamos os demais que excederem o número de vagas disponíveis.

Novamente, o processo termina quando cada agente proponente estiver alocado ou houver sido rejeitado por cada agente seletor.

O resultado final será o mesmo que obtivemos com o procedimento exemplificado. Trataremos assim um pequeno exemplo na Seção 5.1.

2.4 Recapitulação

Buscamos explicar e exemplificar o algoritmo Gale-Shapley para obter emparelhamentos estáveis de casais e indicar sua adaptabilidade mesmo a situações com falta de preferência, números desiguais de indivíduos a serem pareados, listas incompletas e uniões de um único agente com vários outros.

Isso foi possível contando com algumas estratégias comuns em raciocínio lógico, como a utilização de curingas e repetição de listas, permitindo aplicar novamente o *mesmo* procedimento, realizando a *redução* desses problemas mais complexos à primeira versão mais simples que estudamos.

Importante: Reflita e constate que essa solução também pode ser aplicada em situações ainda mais complexas, em que ocorram todos os problemas supracitados simultaneamente.

Adotamos a figura do casamento para explicar os exemplos tradicionais, mas, nos próximos capítulos, veremos que o algoritmo é considerado tanto na academia como no mundo real cotidiano, nas questões de admissão de alunos nas universidades e escolas e de emparelhamento de colegas de quarto.