Capítulo 11

A regra dos sinais: alguns elementos importantes do seu contexto histórico

Selma Felisbino Hillesheim
Méricles Thadeu Moretti

HILLESHEIM, SF., and MORETTI, MT. A regra dos sinais: alguns elementos importantes do seu contexto histórico. In: BRANDT, CF., and MORETTI, MT., orgs. *Ensinar e aprender matemática*: possibilidades para a prática educativa [online]. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016, pp. 233-254. ISBN 978-85-7798-215-8. Available from SciELO Books <http://books.scielo.org>.

CAPÍTULO 11

A REGRA DOS SINAIS: ALGUNS ELEMENTOS IMPORTANTES DO SEU CONTEXTO HISTÓRICO

Selma Felisbino Hillesheim
Méricles Thadeu Moretti

Neste capítulo abordaremos alguns aspectos da história do número negativo, bem como do surgimento e da consolidação da regra de sinais da multiplicação desses números, que se mostram relevantes no contexto histórico geral. Uma história de incertezas, de idas e vindas e de muitas hesitações na aceitação da ideia de número negativo. A introdução conceitual dos números relativos foi um processo lento e surpreendente. A origem da regra de sinais é geralmente atribuída a Diofanto de Alexandria que viveu no século III depois de Cristo[1]. Diofanto não faz nenhuma referência aos números relativos, mas, em seu Livro I *Aritmética,* ele menciona: "Menos multiplicado por menos é mais e menos por mais é menos" (DIOFANTO, 2007, p. 22).

No período compreendido entre Diofanto e Hankel, muitos matemáticos se propuseram a construir uma demonstração para a regra de sinais pautada em exemplos práticos. Porém, Hankel em 1867, demonstra que a única das regras possíveis é aquela que preserva a distributividade à esquerda e à direita, isso porque ele aborda a ideia de número relativo numa outra dimensão, que não aquela procurada na natureza. Hankel[2] *apud* Glaeser (1981, p. 338), diferentemente de Laplace, que acreditava na existência de uma explicação para a multiplicação dos relativos na natureza, aborda a questão numa outra

[1] Não se sabe ao certo o período em que Diofanto viveu, mas de acordo com Eves (2004, p. 207), a maioria dos historiadores o situa no 3º século da nossa Era.

[2] HANKEL, H. **Théorie des complexen Zahlsysteme.** Leipzig: Leopold Voss, 1867.

dimensão, os números não são descobertos, são imaginados e a regra de sinais é pura invenção da mente humana, uma convenção.

Os motivos que nos impulsionaram a realizar essa pesquisa estão diretamente relacionados ao processo de ensino e aprendizagem desses números. Atuando há muitos anos como professores, percebemos que o ensino dos números relativos no ensino fundamental enfrenta problemas que acabam repercutindo ao longo da vida escolar dos alunos com repercussões, até mesmo, no ensino superior. A dificuldade enfrentada pelos alunos na aprendizagem da multiplicação de dois números negativos direcionou o tema deste trabalho, que faz parte da nossa pesquisa de mestrado (HILLESHEIM, 2013), a buscar subsídios históricos que possam nos ajudar a compreender tais dificuldades. A partir dessa pesquisa, acreditamos que esses aspectos históricos poderão trazer significativas contribuições para o entendimento das dificuldades encontradas pelos matemáticos, no passado, e sua estreita relação com as dificuldades encontradas hoje por nossos alunos no que tange o processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros relativos.

UM POUCO DA HISTÓRIA ANTIGA SOBRE OS NÚMEROS NEGATIVOS

A origem da regra de sinais da multiplicação de números negativos é, em geral, atribuída a Diofanto de Alexandria. Sobre ele pouco se sabe, até mesmo o período em que viveu. No entanto, os historiadores apontam evidências e tendem a situá-lo no século III de nossa era. Esse algebrista de nacionalidade desconhecida escreveu três trabalhos: *Aritmética*, *Sobre Números Poligonais e Prisma* (EVES, 2004, p. 207). A regra que estabelece que "- × - = +" aparece no começo do livro I da sua *Aritmética* de forma explícita: "Menos multiplicado por menos é mais e menos por mais é menos" (DIOFANTO DE ALEXANDRIA, 2007, p. 22). Porém, em nenhum momento Diofanto apresenta uma justificativa para tal regra. Ele apenas a usava nos cálculos intermediários e não aceitava as raízes negativas na solução das equações quadráticas (BOYER, 2010).

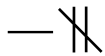
No oriente, a matemática assumiu um caráter prático voltado às questões administrativas, organizações públicas e cobrança de impostos. Não se encontra na matemática oriental registros de demonstrações ou argumentações sobre os cálculos, apenas uma prescrição de como aplicar as regras. Inicialmente, foi dada ênfase à aritmética prática e a medição, no entanto, com o passar do tempo, fortes tendências levam a abstração, e a aritmética se transformou em álgebra (STRUIK, 1992).Contrariando a posição de Struik (1992), a respeito de não se encontrar na matemática oriental demonstrações sobre cálculos, Joseph (1991) defende, ao longo das 494 páginas do seu livro "La Cresta Del Pavo Real: las matemáticas y susraíces no europeas", a posição de que a atividade matemática fora da Europa tem sido ignorada, desvalorizada e distorcida. O autor afirma que existe certa resistência em relação aos conhecimentos matemáticos anteriores ao período da matemática grega, comparando-a com "rabiscos de criançasque estão aprendendo a escrever em oposição a grande literatura" (KLINE[3] *apud* JOSEPH, 1991, p. 32). Essa visão atribui à matemática egípcia e babilônica a ideia de que essas matemáticas não tinham regras gerais, careciam de demonstrações e não eram abstratas. Entretanto, não se pode negar que nas resoluções dos problemas que foram apresentadas por esses povos, tanto no papiro de Ahmes como nas tábuas babilônicas, "indicaria que existia uma compreensão da generalidade das regras subjacentes" (JOSEPH, 1991, p. 181). Assim, o autor reconhece que diferentes culturas, em diferentes momentos da história, têm contribuído para os conhecimentos matemáticos do mundo, cada qual com suas características próprias (JOSEPH, 1991, p. 34).

De acordo com Struik (1992), grande parte do que sabemos sobre os conhecimentos egípcios encontram-se em dois papiros: *Papiro de Rhind* e *Papiro de Moscovo*. Esses papiros apresentam problemas que estão baseados numa matemática pautada no sistema de numeração decimal. De acordo com Lumpkin[4] *apud* PONTES (2010) e ANJOS (2008), apesar da ideia de número negativo não ter sido registrada na civilização egípcia, eles já mostravam indicativos desses números ao utilizarem malhas quadriculadas na construção de pirâmides. Eles escolhiam uma linha no nível do chão como sendo a linha zero e numeravam as outras linhas como sendo cúbico acima de zero e abaixo de zero. Mesmo assim, de acordo com Eves (2004, p. 67), "a matemática do Egito antigo nunca alcançou o nível da matemática da Babilônia".

[3] KLINE, M. **Mathematics:** A Cultural Approach, Reading.Massachussets:Addson-Wesley, 1962.

[4] LUMPKIN, Beatrice. **The ancient Egyptian concept of zero and the Egyptian symbol for zero:** A note on a little known African achievement in the ethnomathematics**.** Study Group on Ethnomathematics (ISGEm) Newsletter, v. 11, n. 2, Jun 1996. Disponívelem: <http://web.nmsu.edu/~pscott/isgem112.htm.>Acessoem: 17 de abr. 2011.

Na civilização babilônica, perto do ano 2000 a. C., a aritmética da Babilônia já tinha se desenvolvido e passado para a álgebra retórica. Encontram-se registros que apontam que eles resolviam equações lineares e quadráticas e, também, problemas que envolviam equações cúbicas e biquadradas. No entanto, encontravam apenas raízes positivas. Sua geometria tinha base em problemas práticos relacionados com a medição, mas a forma geométrica era apenas uma forma de apresentar uma questão algébrica (STRUIK, 1992; EVES, 2004).

O estudo da matemática antiga chinesa pode ser encontrada na mais importante obra da matemática chinesa *Jiuzhangsuan-shu (Chiuchangsuanshu),* ou *Nove Capítulos da Arte Matemática*. Essa obra foi produzida, muito provavelmente, durante a dinastia Han (206 a. C. – 220 d. C.) e constitui um livro totalmente voltado à matemática. Sua matemática consiste num conjunto de problemas e uma série desses problemas conduziria a sistemas de equações lineares. A solução dessas equações lineares era efetuada por transformações de matrizes. E nessas matrizes é que encontramos pela primeira vez na história o registro de números negativos (STRUIK, 1992, p. 67). Um número negativo era representado traçando uma diagonal na sua última coluna, por exemplo, - 12 era representado por  (JOSEPH, 1991, p. 207).

Parece que aos chineses a ideia de números negativos não causou problemas, já estavam acostumados a calcular manipulando duas coleções de barras vermelhas e pretas, correspondendo a números positivos e negativos, respectivamente. Contudo, os chineses não aceitavam a ideia de que um número negativo pudesse ser raiz de alguma equação, eram usados apenas como intermediários na execução de algum tipo de cálculo (BOYER, 2010). Em contraste à matemática chinesa, a história da matemática grega nos aponta que o conceito de número negativo não foi registrado nesse período. O principal objetivo da matemática grega expresso nos primeiros estudos foi o de compreender o lugar do homem no universo. Desta forma, a matemática auxiliaria a ordenar as ideias em sequências lógicas e a encontrar a ordem no caos. Dois grupos de pensadores merecem ser destacados na matemática grega. De um lado estavam os “sofistas” preocupados em desenvolver uma matemática mais voltada à compreensão do que à utilidade. E, de outro, os “pitagóricos” que davam importância ao estudo dos elementos imutáveis da natureza e da sociedade. Estudavam geometria, aritmética, astronomia e música. A aritmética era especulativa e pouco tinha em comum com a dos babilônicos (STRUIK, 1992).

De acordo com Eves (2004), uma das características da matemática grega era a sua persistência com as rigorosas demonstrações, alcançando uma existência independente. Os gregos dispunham de duas maneiras principais para resolver equações simples: o método das proporções e o método da aplicação de áreas. Ao que tudo indica, esses métodos se originaram dos pitagóricos. O forte apego que os gregos apresentavam com a geometria impossibilitou-os de ousarem em considerar os negativos como números, pois

> [...] para quem a geometria era um prazer e a álgebra um demônio necessário, rejeitaram os números negativos. Incapazes de ajustá-los em sua geometria, incapazes de representá-los por figuras, os gregos consideravam os negativos não exatamente como números (KASNER; NEWMAN[5] *apud* MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, p. 51).

Segundo Struik (1992, p. 108), os matemáticos gregos fizeram uma separação entre “aritmética” e “logística”. A “aritmética” (*arithmoi*) era a ciência dos números que expressava um número natural, uma “quantidade composta por unidades”. Enquanto a “logística” era o cálculo prático que estava baseado num sistema de numeração que mudou com o tempo. Isso mostra que:

> Historicamente, os números negativos não surgiram na *contagem*, mas nos *cálculos*; ou seja, surgiram na Logística, mais explicitamente na resolução de equações. Isso se concretizou com Diofanto (*fl*. Século III), na sua obra *Arithmetiké*, que era essencialmente um trabalho da Logística Teórica. Nessa obra, Diofanto desenvolveu resoluções de equações usando implicitamente as regras de sinais, todavia desconsiderou a existência independente dos números negativos (ANJOS, 2008, p. 24, grifos do autor).

A matemática grega não aceitou a existência independente do número negativo, no entanto, as regras de sinais aparecem implicitamente na obra de Diofanto como uma tentativa de abreviar os cálculos. Diofanto não aceitou a ideia de número negativo isoladamente, estes aparecem somente como cálculos intermediários.

[5] KASNER, E; NEWMAN, J. **Mathematics and the Imagination.** Middlesex: Pelican Books, 1968.

ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS DOS NÚMEROS NEGATIVOS NA IDADE MÉDIA

A ciência chinesa influenciou e deixou sua marca na ciência de outras sociedades, por exemplo, o sistema decimal e os números negativos podem ter vindo da China para a Índia. No entanto, não podemos negar que a ciência indiana também exerceu influência sobre a China. "A influência indiana na China pode ser tão antiga como a introdução do budismo na China" (STRUIK, 1992, p. 128).

Os hindus se destacaram como calculadores, no entanto, sua geometria deixava a desejar, pois era muito empírica e, em geral, ligada à mensuração. Como eram excelentes aritméticos, deram importantes contribuições à álgebra. "Ao contrário de Diofanto, que procurava *uma qualquer das soluções racionais* de uma equação indeterminada, os hindus empenhavam-se em encontrar *todas as soluções inteiras possíveis*" (EVES, 2004, p. 256, grifos do autor). Na matemática hindu, o mais relevante matemático do século VII foi Brahmagupta (598-665). Segundo Boyer (2010), Brahmagupta fez contribuições importantes à álgebra ao considerar duas raízes, mesmo as negativas, como solução das equações quadráticas. Pela primeira vez, em sua obra, encontra-se a aritmética sistematizada dos números negativos e do zero. Sua obra fornece, também, as seguintes regras operatórias envolvendo os números negativos:

> Positivo dividido por positivo, ou negativo por negativo, é afirmativo. Cifra dividida por cifra é nada. Positivo dividido por negativo é negativo. Negativo dividido por afirmativo é negativo. Positivo ou negativo dividido por cifra é uma fração com esse denominador (BOYER, 2010, p. 150).

No entanto, Brahmagupta complicou-se um pouco ao afirmar que 0/0 = 0, porém, para o caso de a/0 ele não se comprometeu. Outro matemático hindu que teve destaque na segunda metade da Idade Média foi Bhaskara (1114 - 1185). Ele foi responsável por preencher algumas lacunas apresentadas na obra de Brahmagupta como, por exemplo, o problema da divisão por zero. Na sua obra mais conhecida, o *Lilavati,* cujo título é o nome da sua filha, Bhaskara reuniu problemas de Brahmagupta e outros, acrescentando suas novas observações. O *Lilavati* apresenta uma série de problemas sobre os itens prediletos dos hindus: equações lineares e quadráticas, tanto determinadas quanto indeterminadas, simples mensuração, progressão aritmética e geométrica e outros (BOYER, 2010, p. 152). Bhaskara, em um de seus livros, resolveu a equação $x^2 - 45x = 250$ encontrando as raízes $x = 50$ e $x = -5$ como solução do problema. Para a raiz negativa ele manifestou certo cepticismo. No entanto, não se pode desconsiderar que, de certa forma, os números negativos ganharam com isso uma vagarosa aceitação (STRUIK, 1992, p. 117).

No período de 650 a 750 os árabes não demonstravam muito interesse intelectual, foi somente na segunda metade do oitavo século que se observou um despertar cultural no Islã. Neste período foram chamados para Bagdá estudiosos da Síria e da Mesopotâmia, a cidade se tornou uma nova Alexandria. Durante o califado de al-Mamum estabeleceu-se em Bagdá uma "Casa da Sabedoria" onde se encontrava, entre os mestres, um matemático e astrônomo chamado Mohammed ibu-Musa al-Khowarizmi que escreveu obras de astronomia e matemática. Dentre essas obras, a mais importante foi *Al-jabrWa'lmuqabalah* da qual teve origem o termo álgebra. A álgebra apresentada nesta obra está mais próxima da álgebra elementar de hoje que as obras de Diofante e de Brahmagupta. No entanto, nem al-Khowarizmi nem outros matemáticos árabes usaram a sincopação ou números negativos (BOYER, 2010, p. 156). As contribuições de al-Khowarizmi foram importantes no contexto histórico da matemática, pois foi ele uma das principais fontes pela qual os numerais indianos e a álgebra árabe chegaram à Europa (STRUIK, 1992, p. 122).

Outro matemático que também se destacou no campo da álgebra geométrica foi Omar Khayyam. Ele resolveu as equações cúbicas geometricamente, no entanto, não aceitava as raízes negativas e, com frequência, não encontrava todas as raízes positivas (EVES, 2004).

A matemática árabe sofreu influência das matemáticas grega e hindu. No entanto, a matemática árabe possui características próprias, em geral tinham uma boa e clara apresentação e uma organização sistemática dos cálculos. Apesar do conhecimento que os árabes tinham a respeito das regras que regem os números negativos, eles rejeitavam as raízes negativas e não utilizavam nenhum tipo de abreviatura ou símbolo de notação (BOYER, 2010).

Na Europa, com a expansão do comércio, o interesse pela matemática na Idade Média se espalhou vagarosamente. A matemática especulativa quase desapareceu nesse período, era apenas apreciada pelos filósofos escolásticos.

Os homens práticos estavam interessados na contagem, na aritmética e na computação. Desejos que foram influenciados diretamente pelo crescimento das cidades mercantis (STRUIK, 1992).

O *Liberabaci* – Livro do ábaco – de autoria de Leonardo de Pisa (1175-1250) constitui-se num manual para práticas comerciais transitando entre prática e teoria. Leonardo era filho de comerciante e nascido na cidade de Pisa, também conhecido como Fibonacci, escreveu esse livro no regresso da viagem que fez pelo oriente como mercador, nele constam várias informações aritméticas e algébricas recolhidas nas suas viagens (STRUIK, 1992).

Para Boyer (2010), Fibonacci foi, sem dúvida, o matemático mais original e capaz do mundo medieval e muito de sua obra era demasiada avançada para ser entendida pelas pessoas que viveram na sua época. Pycior[6] *apud* ANJOS (2008) assumiu que Fibonacci, em sua obra *Flos* (1225), aceitou os números negativos como raízes de uma equação. No entanto, Eves (2004), a respeito da obra *Liberabaci,* afirma que: "As raízes negativas e imaginárias não são admitidas e a álgebra é retórica" (EVES, 2004, p. 293).

> Conforme a maioria dos historiadores, a estrutura que Fibonacci seguiu nas resoluções das equações foi similar ao modelo propagado por al-Khowarizmi o que levaria a crer que Fibonacci usou demonstrações geométricas. Consequentemente, isso indicaria uma certa restrição à aceitação dos números negativos como raízes de equação, a qual só seria válido, para representação de dívidas (ANJOS, 2008, p. 30).

O uso dos números negativos passou a ser admitido com a expansão das relações financeiras no comércio, que favoreceu o aparecimento de uma estrutura de crédito. A ideia de tirar 8 de 5 apresentava um aspecto milagroso, assim

> [...] foi necessário esperar o surgimento de um sistema bancário com uma estrutura de crédito internacional, tal o que veio a aparecer nas cidades do norte da Itália (particularmente Florença e Veneza) durante o século XIV. A aparentemente absurda subtração 5 menos 7 tornou-se possível quando novos banqueiros começaram a permitir aos seus clientes sacar 7 ducados de ouro enquanto seus depósitos eram apenas 5 (SINGH[7] *apud* MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, p. 52).

[6] PYCIOR, Helena M. **Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[7] SINGH, J. **Mathematical Ideas:** Their Nature and Use. London, Hutchinson and Co. Ltd.,1972.

Nesse contexto, o número negativo acabou sendo usado com finalidades contábeis. No entanto, apesar de útil, a ideia dos negativos associada a um débito não era satisfatória e não preenchia o requisito matemático da metáfora, principalmente quando se tratava da regra dos sinais (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992).

ELEMENTOS HISTÓRICOS IMPORTANTES A RESPEITO DOS NÚMEROS NEGATIVOS NA IDADE MODERNA

No início da Renascença a maior parte dos matemáticos tinha origem alemã ou italiana. Contudo, em 1484, foi composto na França um manuscrito intitulado de *Triparty em La science des nombres,* de autoria de Nicolas Chuquet. Nesse manuscrito, a segunda metade da última parte trata da resolução de equações, onde traz uma novidade importante: pela primeira vez, ao escrever 4x = -2, Chuquet expressou um número negativo isolado numa equação algébrica (BOYER, 2010).

Segundo Boyer (2010), o início do século XVI foi marcado por grandes algebristas alemães. Um deles Michael Stifel (1486-1567), ex-monge e professor de matemática em Jena, escreveu *Arithmetica integra* publicada em 1544. Essa obra apresenta-se dividida em três partes: os números racionais, números irracionais e álgebra. Dentre os vários assuntos que aborda, o aspecto mais importante é o seu tratamento sobre os números negativos, radicais e potências. "Usando coeficientes negativos em equações, Stifel pode reduzir a multiplicidade de casos de equações quadráticas ao que parecia como única forma; mas teve que explicar, por uma regra especial quando usar + e quando -" (BOYER, 2010, p. 193). Ele tinha conhecimento sobre as propriedades dos números negativos, embora não os aceitasse como raiz de uma equação e costumava chamá-los de "números absurdos".

Em 1545, muito dos problemas não resolvidos pela *Arithmetica integra,* com relação à resolução das equações cúbicas e quárticas, foram superadas e tornaram-se conhecidas com a publicação da *Ars magna* de Cardano (1501-1576). No entanto, deve ser mencionado que Cardano não foi o descobridor original da solução da cúbica e da quártica. Depois de um juramento de manter segredo sobre a solução, conseguiu arrancar de Tartaglia a solução da cúbica.

Cardano era médico e um respeitado professor em Bolonha e Milão. Seguidor de al-Khowarizmi, pensava em equações com coeficientes numéricos específicos como representantes de classes gerais. Cardano encontrou dificuldades para resolver a equação $x^3 = 15x + 4$ utilizando o seu método, pois ele conhecia a raiz 4 e, com a aplicação da regra, chegava-se a $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Cardano sabia que não existia raiz quadrada de número negativo, no entanto, não entendia como a sua regra faria sentido nessa situação. Ele chamava essas raízes de "números fictícios" ou "números falsos" correspondendo aos números negativos e suas raízes complexas (BOYER, 2010).

De acordo com Eves (2004, p. 307), a *Ars Magna* foi o primeiro grande tratado dedicado especialmente à álgebra, escrito em latim. Uma de suas importantes contribuições se deve ao fato de que nele se dá atenção às raízes negativas e ao cálculo de números complexos. Com a resolução das equações cúbicas, um novo tipo de número começa a aparecer: os negativos. Até o momento, os matemáticos podiam negar a existência de um número negativo ou de uma raiz quadrada negativa alegando que equações do tipo $x + 1 = 0$ e $x^2 + 4 = 0$ não são resolúveis. No entanto, com a resolução das cúbicas, sempre que as três raízes de uma equação são reais e diferentes de zero a fórmula de Tartaglia-Cardano leva ao cálculo de uma raiz quadrada negativa. Nesse contexto, aparece a figura de um algebrista italiano, Rafael Bombelli (1526-1573) que teve a brilhante ideia dos imaginários conjugados que levariam ao número real 4. Porém, as observações de Bombelli não contribuíram na resolução efetiva das cúbicas, pois só funcionava se ele conhecesse antecipadamente o valor de uma das raízes. Entretanto, Bombelli apontou o papel importante que os imaginários conjugados iriam desempenhar futuramente (BOYER, 2010, p. 197). A falta de suporte matemático expressado por Bombelli cedeu espaço ao simbolismo expressado por François Viète (1540-1603). Esse jurista francês, nascido em Fontenay, ligado à corte de Henrique IV, fez contribuições no campo da aritmética, álgebra, trigonometria e geometria. Mas, foi sem dúvida, na álgebra que ele deu as mais importantes contribuições. Segundo Boyer (2010, p. 208), "Viète introduziu uma convenção tão simples quanto fecunda. Usou uma vogal para representar, em álgebra, uma quantidade suposta desconhecida, ou indeterminada, e uma consoante para representar uma grandeza ou números supostos conhecidos ou dados". Desse modo, aparece pela primeira vez uma distinção entre o conceito de parâmetro e a ideia de quantidade desconhecida. Embora Viète tenha contribuído de maneira significativa no campo da álgebra, não considerava as raízes negativas. Fato que o impossibilitou de enunciar as relações entre raízes e coeficientes na resolução das equações cúbicas. Cabendo a Girard, em 1629, enunciar claramente essas relações. Girard, ao contrário de Viète, admitia as raízes negativas e imaginárias (BOYER, 2010).

Outro matemático francês que se destacou foi René Descartes (1596-1650), natural de Touraine, residiu muitos anos na Holanda e morreu em Estocolmo. "Descartes procurava um método geral de pensamento capaz de facilitar as descobertas e *encontrar a verdade nas ciências*" (STRUIK, 1992, p. 162, grifos do autor). Assim como os platônicos acreditavam na harmonia do universo, os cartesianos acreditam num método geral baseado na razão. Na sua obra *La Géométrie*, publicada em 1637,inclui a aplicação da álgebra à geometria. O livro I fornece instruções detalhadas de como resolver as equações quadráticas geometricamente, contribuindo de certa forma para a não aceitação de raízes negativas, tomando-as como raízes "falsas" (BOYER, 2010).

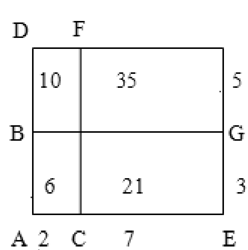
O desconforto provocado pelos números negativos ainda perdurou por certo tempo. No entanto, percebe-se que tal assunto incomoda os matemáticos a tal ponto que se sentem desafiados a buscar uma explicação plausível para o assunto. Um exemplo é Simon Stevin (1548-1620), um importante matemático Belga do século XVI. Ele propôs, na sua "Aritmética" (1634), apresentar uma demonstração da regra de sinais que segue:

> Mais multiplicado por mais dá produto mais, & menos multiplicado por menos dá produto mais; & mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos. Explicação do dado: Suponhamos 8 – 5 multiplicado por 9 – 7 da seguinte maneira: - 7 vezes – 5 são + 35 (+ 35, porque, como diz o teorema, - vezes – dá +). A seguir – 7 vezes 8 faz – 56 (- 56, porque, como é dito no teorema, - por + dá -). E semelhante seja 8 – 5 multiplicado por 9, & darão produtos 72 – 45; depois adicione + 72 + 35, são 107. Depois adicione os – 56 – 45, são 101; e subtraindo o 101 de 107 resta 6, para o produto da tal

> multiplicação. Explicação do exigido. É preciso demonstrar pelo dado, que + multiplicado por + dá mais, & que – por – dá +, & que + por -, ou – por + dá -. Demonstração. O número a multiplicar 8 – 5 vale 3, & o multiplicador 9 – 7 vale 2. Mas multiplicando 2 por 3, o produto é 6. Logo o produto acima também 6, é o produto verdadeiro. Mas o valor encontrado pela multiplicação, onde dissemos que + multiplicado por + dá produto +, & - por – dá produto +, & + por - ou – por + dá produto -, logo o teorema é verdadeiro.
>
> $$\begin{array}{r} 8-5 \\ 9-7 \\ \hline -56+35 \\ 72-45 \quad \\ \hline 6 \end{array}$$
>
> (GLAESER, 1981, p. 312)

Observemos que o argumento apresentado por Stevin é apenas uma verificação de um caso particular que não apresenta uma generalização. Outro aspecto que pode ser considerado é o fato que em nenhum momento ele considera a ideia de número negativo isolado, o sinal de menos que aparece, por exemplo, no 56 não representa um número negativo, mas apenas uma operação de subtração que precisa ser realizada para que o cálculo seja efetuado. No entanto, ele ainda prossegue com uma demonstração geométrica. Vejamos:

> Outra demonstração geométrica: Suponhamos AB 8 – 5 (a saber AD8 – DB5). Depois AC9 – 7 (a saber AE9 – EC7) seu produto será CB: ou seja, segundo a multiplicação precedente ED72 – EF56 – DG45 + GF35, os quais demonstraremos serem iguais a CB desta maneira. De todo ED + GF, subtraindo EF, & DG, resta CB. Conclusão. Logo mais multiplicado por mais dá produto mais, & menos multiplicado por menos, dá produto mais, & mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos; o que queríamos demonstrar.



> (GLAESER, 1981, p. 312)

O exemplo de Stevin nos mostra como a geometria oferece apoio à aritmética, contribuindo para a comprovação de que a regra funciona. Para Glaeser (1981), a demonstração geométrica apresentada por Stevin pode servir de base para o desenvolvimento geral de (a – b) × (c – d) = ac – ad – bc + bd. No entanto, observamos que nesse período histórico a regra – × – = + só é usada como um procedimento transitório. O sintoma de evitamento dos números negativos, assim denominado por Glaeser (1981), vai continuar incomodando muitos matemáticos. Pierre Fermat (1601-1665) pode ser citado como exemplo ao fazer que seu amigo Jacques de Billy escrevesse conselhos sobre como proceder diante de uma "raiz falsa" no caso das equações diofantinas, a fim de se obter uma solução "aceitável" (GLAESER, 1981, p. 315). Outro personagem que mostrou uma insatisfação com relação aos negativos foi Thomas Harriot (1560-1621) que pensou ter provado em seu *"Artes Analíticas Aplicadas"* (1631) a impossibilidade das raízes negativas (MEDEIROS; MEDEIROS, 1992).

Nesse contexto, podemos observar que mesmo os matemáticos que viveram na mesma época assumiram posturas contraditórias a respeito dos negativos. Enquanto Fermat e Harriot hesitavam com os negativos, Stevin e Euler faziam tentativas para demonstrar a regra de sinais, apesar de não obterem êxito em seus ensaios. Leonardo Euler (1707-1783) foi um importante matemático suíço que atuou em vários ramos da matemática. Euler, assim como outros matemáticos da época, também mostrou-se perturbado a respeito da regra de sinais e, na sua obra de cunho pedagógico intitulada "*Elementos da Álgebra*", destinada aos iniciantes, ele ofereceu uma explicação sobre a regra de sinais. Glaeser apresenta a argumentação de Euler em três partes, vejamos:

> 1. A multiplicação de uma dívida por um número positivo não oferece dificuldade: três dívidas de "a escudos" fazem uma dívida de "3 a escudos". Então b × (-a) = -ab.
> 2. Pela comutatividade, Euler deduz que (- a) × b = - ab.
> 3. Resta determinar o que é o produto (- a) pelo (- b). É claro, diz Euler, que o valor absoluto é ab. Se trata então de se decidir entre + ab e – ab. Mas como (- a) × b vale – ab, não resta mais como única possibilidade que (- a) × (- b) = + ab (!!!)
>
> (EULER,*apud* GLAESER, 1981, p. 319).

O malabarismo apresentado por Euler para justificar a regra de sinais demonstra que ele não tinha ainda conhecimentos suficientes para esclarecer convincentemente os pontos obscuros apresentados pela regra de sinais. Na mesma obra, segundo Glaeser (1981), Euler concebe o número negativo como sendo uma letra precedida com o sinal – (menos). Euler não consegue estabelecer uma ideia para a formação do conceito de número negativo, nem muito menos concebê-los como sendo quantidades menores que zero.

Para começar a mudança na questão da aceitação dos números negativos, o final do século XVII foi marcado pelo nascimento de um importante matemático chamado Colin MacLaurin (1698-1746). A sua obra "*Tratado da Álgebra*", publicado dois anos após a sua morte, tornou-se referência na Grã-Bretanha e sobre o continente. Nesse livro, ele aborda a ideia de número negativo como sendo uma quantidade tomada no sentido oposto à positiva.

> Assim, a quantidade negativa, bem longe de ser rigorosamente menos que nada, não é menos real em sua espécie que a quantidade positiva, mas ela é posta num sentido oposto; de onde não se segue mais que uma quantidade considerada única, não seria negativa; ela só é por comparação, e quanto a quantidade que chamamos positiva não há nada a mais que seja oposto a ele. Não se saberia subtrair uma maior: por exemplo, seria absurdo de querer subtrair uma maior quantidade de matéria de uma menor (MACLAURIN[8], *apud* GLAESER, 1981, p. 317).

MacLaurin não consegue conceber as quantidades negativas isoladamente, o que futuramente causará conflitos ao não fazer a distinção entre zero absoluto e zero origem. No entanto, de acordo com Pontes (2010), MacLaurin passa a entender o número como uma ação e não mais como um estado. Nessa mesma obra, segundo Glaeser (1981), MacLaurin apresenta uma justificação para a regra de sinais utilizando a distributividade da multiplicação em relação à adição e sua dedução contribuiu para o início de um formalismo até então inexistente. Sua explicação se baseava na seguinte ideia: Se $+ a - a = 0$, então se multiplicarmos essa expressão por um número positivo $+ n$, teremos o primeiro termo $+ na$, e como segundo termo $- na$, pois o produto também deverá ser zero, logo$- na + na$ também deverá ser zero. E quando a expressão $+a - a$ for multiplicada por um número negativo, esse produto também deverá ser

[8] MACLAURIN Colin (1748). **Traité d'Algèbreet de lamanière de Pappliquer**. Paris: C. A. Jomber 1753.

zero. Assim, se multiplicarmos a expressão $+a - a$ por $-n$, teremos $-na$ como o primeiro termo e $+na$ para o segundo termo, pois os dois termos precisam ser anulados. Dessa forma, ele enuncia a regra de sinais colocando que o produto de dois números com sinais diferentes é negativo, e o produto de dois números com o mesmo sinal é positivo. Apesar das importantes contribuições de MacLaurin a respeito dos números relativos, ele não foi capaz de apresentar a teoria dos números relativos, mas seus estudos foram tomados como referência pelos matemáticos da posteridade.

OS NÚMEROS NEGATIVOS NA IDADE CONTEMPORÂNEA: O COMEÇO DE UMA NOVA HISTÓRIA

O século XIX, de acordo com Boyer (2010), mais do que qualquer outra época, merece ser considerada a Idade de Ouro da matemática. Dentre os muitos matemáticos que se destacaram nesse período, podemos citar o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Como seu pai era um artesão, então o duque de Brunswick, reconhecendo em Gauss uma criança prodígio, assumiu a sua educação. O jovem estudou em Göttingen e em 1799 obteve o grau de doutor. A sua carreira foi marcada por estudos realizados no campo da astronomia, geodésia e principalmente na matemática. Partes de suas descobertas foram publicadas na sua dissertação em 1799, onde deu a primeira prova do chamado "teorema fundamental da álgebra" e nas *Disquisitionesarithmeticae* de 1801. Estas correspondem a uma reunião de todos os trabalhos anteriores a Gauss que tratam sobre a teoria dos números, na qual Gauss faz importantes contribuições. Em 1831, Gauss, em um de seus tratados, apresenta uma nova teoria dos números complexos em que elucidou muitos enigmas apresentados na aritmética e a lei da reciprocidade quadrática se tornou mais simples que nos números reais. Gauss ao representar os números complexos por pontos num plano afastou para sempre o mistério que ainda assombrava os números complexos (BOYER, 2010; STRUIK, 1992).

O estilo de imprimir rigor à análise iniciado por Gauss no século XIX foi ampliado e aprofundado por Cauchy (1789-1857), o mais importante analista da primeira metade do século (EVES, 2004). Augustin-Louis Cauchy nasceu em Paris e, dentre as suas muitas contribuições na matemática, foi ele o primeiro a estabelecer uma confusão entre os sinais operatórios e predicativos. Como operatórios, os sinais (+ ou -) poderiam designar uma ação: aumentar e diminuir. E, como predicativos qualificariam um estado: positivo ou negativo. No entanto, essas definições caíram em contradição quando Cauchy tenta justificar as propriedades aditivas dos relativos e, de repente, ele abandona o modelo metafórico e aborda a multiplicação de números relativos dogmaticamente. “O modelo metafórico apresentado no início, que facilita a compreensão das propriedades aditivas, é um obstáculo à compreensão da multiplicação” (GLAESER, 1981, p. 334). A discussão levantada por Cauchy a respeito dos sinais operatórios e predicativos irá posteriormente despertar o interesse de Hankel, mas nesse momento ele não consegue apresentar os números relativos de forma clara.

As dificuldades enfrentadas por Cauchy também podem ser percebidas em Pierre-Simon Laplace (1749-1827) nas suas conferências pedagógicas realizadas na Escola Normal Superior, declarando algumas dificuldades a respeito da teoria dos números relativos. Vejamos como Laplace apresenta a justificação da regra de sinais:

> (A regra dos sinais) apresenta algumas dificuldades: temos apenas que conceber que o produto de –a por –b seja o mesmo que o de a por b. Para tornar essa identidade sensível, nós observamos que o produto de–a por +b é – ab (visto que o produto é –a repetido tantas vezes que quando tem unidades em b). Observamos em seguida que o produto de – a por b – b é nulo, pois o multiplicador é nulo; assim o produto de – a por + b é – ab, o produto de – a por – b deve ser de sinal contrário ou igual à + ab para o destruir (*apud* GLAESER, 1981, p. 333).

Na sua justificativa observamos alguns aspectos familiares à demonstração apresentada por Euler, no entanto, Laplace consegue avançar no aspecto referente à demonstração da propriedade distributiva e o desapego a um modelo físico. Mesmo assim, Laplace não consegue propor uma extensão formal para os números relativos. Talvez isso possa estar ligado com a forma de Laplace apresentar suas demonstrações. Na sua maneira de escrever não explicava nada, quando satisfeito com o resultado, não se importava em deixá-los sem demonstração. A matemática, para Laplace, era como uma caixa de ferramentas a serem usadas na explicação da natureza (EVES, 2004, p. 486).

A partir da segunda metade do século XVIII surge na Inglaterra um grupo de matemáticos com o objetivo de reformar o ensino e a notação do cálculo. Dentre eles, George Peacock (1791-1858) que foi uma figura de destaque na reforma da matéria na Inglaterra, principalmente no que se refere à álgebra, pois lá ainda havia quem achasse que os números negativos não tinham validade (BOYER, 2010, p. 368). Peacock publicou em 1830 o "*Tratado em Álgebra*" e nessa obra ele apresenta uma distinção entre a álgebra aritmética e a álgebra simbólica. De acordo com Eves, a álgebra aritmética era considerada por Peacock "como sendo o estudo resultante do uso de símbolos para denotar os números decimais positivos usuais, juntamente com os símbolos operatórios, como o de adição e o de multiplicação, aos quais podem-se sujeitar esses números" (EVES, 2004, p.576). Dessa forma, apenas as operações com números inteiros positivos seriam possíveis. Ao contrário, a álgebra simbólica

> [...] adota as regras da álgebra aritmética, mas remove todas as restrições: assim a subtração simbólica difere da mesma operação na álgebra aritmética pela permissão do uso de todas as relações de valor dos símbolos ou expressões utilizadas (PEACOCK[9]*apud* ASSIS NETO, 1995, p. 7).

Essa justificativa apresentada por Peacock, em que ele transita de uma álgebra para outra, era chamada por ele como "*princípio de permanência das formas equivalentes*".

> Para incluir os novos símbolos -1, -2, -3,... em uma aritmética ampliada a qual englobe tanto os inteiros positivos como os negativos nós devemos, certamente, definir operações com eles de um modo tal que as regras originais das operações aritméticas sejam preservadas. Por exemplo, a regra $(-1)\times(-1) = 1$ a qual estabelecemos para governar a multiplicação de inteiros negativos, é uma consequência do nosso desejo de preservar a lei distributiva $a.(b + c) = ab + ac$. Pois se nós tivéssemos estabelecido que $(-1) \times (-1) = -1$, então, fazendo $a = -1$, $b =1$, $c = -1$, nós deveríamos ter tido $-1.(1 - 1) = -1 - 1 = -2$, enquanto por outro lado nós realmente temos $-1.(1 -1) = 1 \times 0 = 0$. Levou muito tempo para que os matemáticos percebessem que a 'regra dos sinais', junto com todas as outras definições governando os inteiros negativos e frações não podem ser 'provadas'. Elas são criadas por nós com o objetivo de obter liberdade de operação ao mesmo tempo que preservando as leis fundamentais

[9] PEACOCK, Georg. **A Treatise on Algebra**, Vol. I, Arythmetical Algebra. Reprint 1940. New York: Scripta Mathematica, 1842.

> da aritmética. O que pode – e deve – ser provado é apenas que com base nestas definições as leis comutativa, associativa e distributiva da aritmética são preservadas (COURANT; ROBBINS[10] *apud* MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, p. 56).

Essa visão moderna apresentada por Peacock, fazendo valer para a álgebra simbólica as mesmas regras da álgebra aritmética, provoca uma verdadeira evolução para a formação da teoria dos números relativos.Como consequência das contribuições de Peacock, o alemão Hermann Hankel (1839-1873) publica em 1867 a obra *Theorie der KomplexenZahlensysteme* que amplia o conceito de número de uma forma mais clara e explícita. Ele observava que "a condição para construir uma aritmética universal é, pois, uma matemática puramente intelectual, desligada de todas as percepções" (BOYER, 2010, p. 389). Assim, como fez Peacock, Hankel também estabeleceu um *Princípio da permanência das leis formais:*

> Quando duas formas da arithmetica universalis expressas em símbolos gerais são iguais entre si, elas devem permanecer iguais entre si mesmo quando os símbolos deixam de designar simplesmente grandezas, e dessa forma também as operações podem obter qualquer outro conteúdo (HANKEL[11]*apud* ASSIS NETO, 1995, p. 7).

Pautado nesse princípio de permanência e conhecendo as propriedades aditivas de $\mathbb{R}$ e a multiplicação de $\mathbb{R}^+$, Hankel propõe prolongar a multiplicação de $\mathbb{R}^+$ para $\mathbb{R}$ e enuncia o seguinte Teorema: "A única multiplicação sobre $\mathbb{R}$, que prolonga a multiplicação usual sobre $\mathbb{R}^+$, respeitando as distribuições (à esquerda e à direita), é conforme a regra de sinais":

> Demonstração:
> $0 = a \times 0 = a \times (b + \text{opp } b) = ab + a \times (\text{opp } b)$
> $0 = 0 \times (\text{opp } b) = (\text{opp } a) \times (\text{opp } b) + a \times (\text{opp } b)$
> De onde
> $(\text{opp } a) \times (\text{opp } b) = ab$
> (GLAESER, 1981, p. 338)

[10] COURANT, R; ROBBINS, H. Wat is Mathematics? An elementary Approach to Ideas and Methods. New York, Oxford Univ. Press, 1987.

[11] HANKEL, Hermann.**Théorie der complexenZahlensysteme**. Leipzig: Leopold Voss, 1867.

Observamos que, de certa maneira, essa demonstração pode ser encontrada em documentos anteriores, no entanto, Hankel, ao contrário de Laplace, que procurava uma explicação na natureza, aborda a multiplicação dos números relativos como uma extensão das propriedades dos números reais positivos para os reais. Dessa forma, a regra de sinais é uma convenção para manteruma consistência interna da própria matemática.

> Não é possível pronunciar-se tão acirradamente contra uma visão tão divulgada que essas equações [as regras dos sinais] jamais possam ser provadas em matemática formal; elas são convenções arbitrariamente estabelecidas para que se preserve o formalismo já existente nos cálculos. [...] Contudo, uma vez definidas, todas as demais leis da multiplicação derivam delas por necessidade (HANKEL[12] *apud* SCHBRING, 2007, p. 6).

A revolução cumprida por Hankel que recusa a busca por um bom modelo, segundo Glaeser (1981), consiste em abordar os números numa outra perspectiva. Não podemos mais procurar exemplos práticos que explicam os números relativos por analogias, pois esses números não são mais descobertos, mas inventados, imaginados.

No transcorrer da história da construção dos números relativos, percebemos que, enquanto os matemáticos estavam presos em buscar exemplos que explicavam esses números, eles não fizeram grandes progressos. A difícil aceitação dos números negativos que se fez presente durante todo esse percurso ainda se mostrou presente por certo período, mesmo após a revolução cumprida por Hankel.

Schubring (2007) mostra exemplo de calorosos debates acadêmicos ocorridos na comunidade de professores de matemática a respeito da hesitação dos relativos. Mencionaremos um trecho de Hoffmann (1884)[13], citado por Schubring, onde posta um cenário de horror e consequências drásticas para o ensino da matemática, se os professores tiverem que dizer aos alunos que a regra de sinais é uma convenção: "Eu temerei ver os olhos de surpresa

[12] HANKEL, Hermann. **Theorie der complexen Zahlensysteme:** insbesondere der gemeinenimaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionennebstihrergeometrischen Darstellung. Leipzig: Voss, 1867.

[13] HOFFMANN, J.C.V. **Zweiwichtige Fragenüber das Negative, beantwortetvom Herausgeber.** Zeitschriftfürmathematischenundnaturwissenschaftlichen Unterricht, v. 15, p. 580-582, 1884.

e de espanto dos alunos. Alunos inteligentes sobreviveriam com perguntas: Isso é verdadeiramente arbitrário? Não se pode demonstrar?" (2007, p. 17).

> Carlo Bourlet em 1896 introduziu na França um manual de ensino secundário sobre os números relativos. Nele ele apresenta as propriedades aditivas dos números relativos baseados sobre o modelo comercial e sobre a referência de um ponto sobre um eixo. Contudo, no capítulo seguinte, a multiplicação logo se mostra dogmática (GLAESER, 1981, p. 343).

Apesar da aceitação do conceito de número negativo e suas operações, na comunidade dos matemáticos profissionais, após a publicação de Hankel, na comunidade de professores esse debate ainda perdurou por muito tempo. A resistência dos professores em aceitar que a regra de sinais para a multiplicação de dois números negativos não pode ser provada e que precisa ser "mais" para preservar o formalismo matemático já existente foi um fator de destaque no percurso histórico da aceitação da regra de sinais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho nos mostra que historicamente o processo de consolidação do conceito de número negativo sofreu hesitações tanto na comunidade dos matemáticos, quanto na comunidade dos professores. A ideia de número negativo atrelado ao pensamento concreto travou durante um longo período histórico o debate a respeito da multiplicação desses números. A procura por um bom modelo que explicasse a multiplicação $- \times - = +$ só se resolve quando a matemática acadêmica assume que não há significado na natureza que explique esse produto.

Dentre as várias possibilidades para a regra dos sinais para a multiplicação, a escolha recaiu sobre aquela regra que preserva as distributividades à esquerda e à direita, conforme foi apresentada por Hankel. Estas propriedades já são observadas longamente na história desde Diofanto de Alexandria, quando tratadas com os números positivos, e é bastante natural procurar prolongá-las também para o caso dos negativos. Acreditamos que seja este um dos aspectos que deve guiar o ensino da regra dos sinais no ensino básico: para campo aditivo, modelo do prolongamento dos números naturais para a reta numérica dos inteiros como sugerido nos PCNs (BRASIL, 1998); para o campo multiplicativo, o modelo baseado no Teorema de Hankel que tem por base a ideia de extensão da propriedade da distributividade dos números positivos para o caso dos números negativos.

Os elementos históricos apontados por este estudo nos mostram a necessidade de evitar os modelos concretos para o ensino da adição dos números inteiros relativos, pois esse mesmo modelo pode trazer obstáculos para a compreensão da multiplicação de dois números negativos. Por exemplo, Carlo Bourlet em 1896 demonstrou, em seus manuais escolares, que o ensino da adição de números inteiros pode ser facilmente compreendida utilizando-se o modelo metafórico, mas não conseguiu utilizar-se desse mesmo princípio para explicar a multiplicação entre dois números negativos.

Agora, fazendo uma ponte desse contexto histórico aos nossos dias atuais, podemos nos perguntar: Depois de passados mais de um século, quais as reais mudanças apresentadas em nossos livros didáticos? Como acontece o processo de ensino dos números relativos para as nossas crianças de hoje? São reflexões que fogem ao escopo desse trabalho, mas são questões importantes para pesquisasno que tange o processo de ensino e aprendizagem dos números negativos.

REFERÊNCIAS

ANJOS, M. F. **A difícil aceitação dos números negativos**: um estudo da teoria dos números de Peter Barlow (1776-1862). Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2008. Disponível em: <http://www.ppgecnm.ccet.ufrn.br/publicacoes/publicacao_86.pdf>. Acesso em: 10 out. 2012.

ASSIS NETO, F. R. de. Duas ou três coisas sobre o "menos vezes menos dá mais". Semana de Estudos em Psicologia da educação matemática: Livro de Resumos, 1995, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 1995.

BOYER, Carl. **História da matemática.** São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (5ª a 8ª séries). Brasília: MEC/CEF, 1998.

DIOFANTO DE ALEXANDRIA. **La aritmética y el libro sobre los** números poligonales.Tres canto: Nivola Libros Ediciones, 2007.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP : Ed. UNICAMP, 2004.

GLAESER, George. Epistemologie des nombres relatifs. **RDM,** v.2, n.3, 1981.

HILLESHEIM, S. F. **Os números inteiros relativos em sala de aula**: perspectivas de ensino para a regra de sinais. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2013.

JOSEPH, G. G. **La Cresta Del Pavo Real**: las matemáticas y SUS raíces no europeas. Madrid: Pirâmides, 1991.

MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. Números negativos: uma história de incertezas. **Bolema,** Rio Claro, v. 7, n. 8, p. 49-59, 1992.

PONTES, M. O. **Obstáculos superados pelos matemáticos no passado e vivenciados pelos alunos na atualidade**: a polêmica multiplicação de números inteiros. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

SCHUBRING, G. Um outro caso de obstáculo epistemológico: o princípio de permanência. **Bolema,** Rio Claro, Ano 20, n. 28, p. 1-20, 2007.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas.** Lisboa: Gradiva, 1992.